# Dérivabilité

$T_a : y = f'(a)(x-a)+f(a)$ tangente.

$T_a \parallel \Delta : y = \alpha x + \beta \Rightarrow f'(a) = \alpha$

$T_a \perp \Delta : y = \alpha x + \beta \Rightarrow f'(a) \times \alpha = -1$

**Q:** Etudier la dérivabilité de $f$ en $x_0$

**R:** $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ f'(a) = \begin{cases} 0 \\ \oplus \\ \ominus \end{cases} \end{cases}$ { Non dér ; ↔ dér

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ ↑ ↓

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ ↓ ↑

## Approximation affine

$f(a+h) \simeq f(a) + h f'(a)$ ($h$ voisin de zéro)

**Q:** Donner une valeur approché de $f(1,999)$

**R** $f(1,999) = f(2 - \underbrace{0,001}_{h}) \simeq f(2) + (-0,001) \times f'(2)$

## Sens de variation

$\forall x \in I$

$f'(x) = \begin{cases} + & f \nearrow \\ - & f \searrow \\ 0 & f \text{ est constante} \end{cases}$

## Dérivées successives

$f'$ : dérivée première

$f'' = f^{(2)}$

$f''' = f^{(3)}$

Exp $f(x) = x^4 - x^2 + \ldots$

$f'(x) = 4x^3 - 2x$

$f''(x) = 12x^2 - 2$

$f^{(3)}(x) = 24x$

## Dérivée de fog

$(fog)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$

$h(x) = \cos(3x^2+1)$

$h'(x) = 6x \times (-\sin(3x^2+1))$

$= -6x \sin(3x^2+1)$

primitive : sin ; dér : $-\cos$ ; $-\sin$

**Q:** Mq $fog$ est dérivable sur $I$

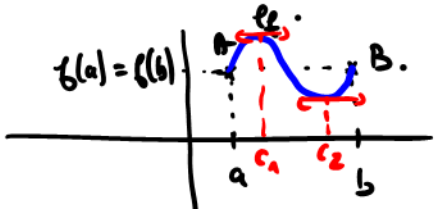
**R :**
- $g$ est dérivable sur $I$.
- $f$ est dérivable sur $J$.
- $g(I) \subseteq J$ ( $g(x) \in J$ )

1) $(uv)' = u'v + v'u$ 2) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ 3°) $(u^n)' = n u' u^{n-1}$

4) $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ 5°) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

# Théorème des accroissements finis

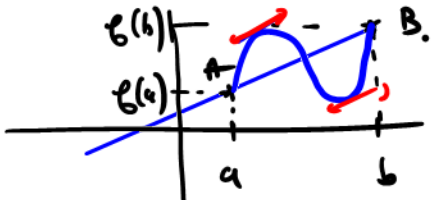
## Théorème de Rolle (T.R)




- $f$ est Cnlin sur $[a;b]$
- $f$ est dérivable sur $]a;b[$
- $f(a) = f(b)$

alors il existe un réel $c$ dans $]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$

## Théorème des accroissements finis (TAF)




- $f$ est Cnlin sur $[a;b]$
- $f$ est dérivable sur $]a;b[$

alors il existe un réel $c$ de $]a;b[$ tel que

$f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

**Q:** Mq $f'(x) = 3$ admet une solution $\alpha$ dans $]a;b[$

**R**
- $f$ est Cnlin sur $[a;b]$
- $f$ est dérivable sur $]a;b[$.
- $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 3$

## Inegalité des accroissements finis (IAF)

- $f$ est Cnlin sur $[a;b]$
- $f$ est dérivable sur $]a;b[$.
- il existe deux réels $m$ et $M$ tel que. $m \leq f'(x) \leq M$ $\forall x \in ]a;b[$

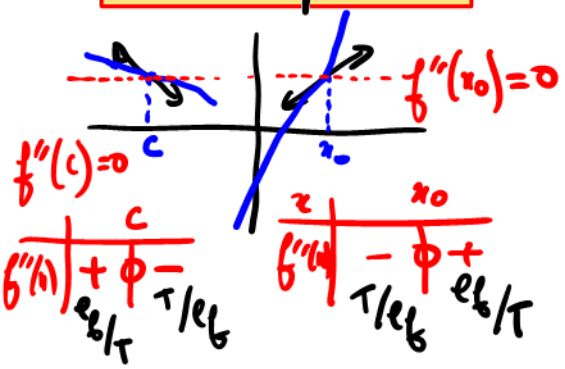
alors

$m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$

- $f$ est dérivable sur $I$
- $\forall x \in I ; |f'(x)| \leq k$.

alors $\forall a, b \in I$

$|f(b)-f(a)| \leq k|b-a|$

(Importante dans les suites Réels)

## point d'inflexion